Clase 7: Continuación.

Peter Hummelgens

12 de noviembre de 2006

Ejemplo 1. *(a) Sea la ED*

$$-u''(x) + u(x) = f(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{otro } x. \end{cases}$$

En la Clase 3 vimos que

$$E(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

es s.f. de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

(el ODLCC que figura en la ED). Como sop(f) es compacto, existe $E(x) * f(x)$ y $u_p = E(x) * f(x)$ es entonces una solución particular de (1) (ver Clase 6). "Por suerte" ya calculamos este producto de convolución en el segundo ejemplo de la Clase 6:

$$u_p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^2-1}{2e}e^x; & x < -1 \\ 1 - \dfrac{1}{e}\cosh(x); & -1 < x < 1 \\ \dfrac{e^2-1}{2e}e^{-x}; & x > 1. \end{cases}$$

La solución general de (1) es $u(x) = u_p(x) + Ae^x + Be^{-x}$ (patrimonio cultural: otra forma de la solución general de $v''(x) - k^2 v(x) = 0$ $(k > 0)$ es $v(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, ver la clase 3 para la forma hiperbólica equivalente).

(b) Sea la ED

$$-u''(x) + u(x) = \delta(x) + \delta''(x); \quad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Una solución particular es

$$u_p(x) = E(x) * [\delta(x) + \delta''(x)] = E(x) + E''_{gen}(x) \tag{3}$$

pero

$$-E''(x)_{gen} + E(x) = \delta(x) \implies E''_{gen}(x) = E(x) - \delta(x),$$

luego con (3),

$$u_p(x) = 2E(x) - \delta(x) = e^{-|x|} - \delta(x).$$

La solución general de (2) es

$$u(x) = e^{-|x|} - \delta(x) + Ae^{x} + Be^{-x}.$$

(c) Sea la ED

$$-u''(x) + u(x) = h(x); \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Ahora <u>hay dudas</u> sobre la existencia de $E(x) * h(x)$ ya que <u>ambos</u> factores <u>no</u> son de soporte compacto. Pero en la Clase 3 encontramos otra s.f. de $L = -d^2/dx^2 + 1$ que es <u>causal</u>, a saber

$$E_1(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x),$$

y $E_1(x) * h(x)$ existe ya que ambos factores son causales. Entonces $u_p(x) = E_1(x) * h(x)$ es una solución particular de (4). Tenemos

$$u_p(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x) * h(x) = -h(x)\int_0^x \mathrm{senh}(\xi)d\xi = -h(x)[\cosh(\xi)]_0^x$$

$$\implies u_p(x) = h(x)[1 - \cosh(x)].$$

Verifiquemos la solución:

$$(u_p)'_{gen}(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x) \quad (h(x)[1-\cosh(x)] \text{ no tiene saltos})$$

$$\implies (u_p)''_{gen}(x) = -h(x)\cosh(x) \quad (h(x)\,\mathrm{senh}(x) \text{ no tiene saltos.})$$

$$\implies -(u_p)''_{gen}(x) + u_p = h(x)\cosh(x) + h(x)[1-\cosh(x)] = h(x),$$

como debe ser.

Observación 1. *El último ejemplo ilustra que para encontrar una solución particular de $Lu(x) = f(x)$ se <u>impone</u> escoger una s.f. E de L <u>adaptada a f</u> en el sentido que esté asegurada la existencia de $E * f$.*

Otra aplicación importante es a la resolución de problemas de valor inicial (PVI)

Ejemplo 2. *Sea el PVI*

$$u''(x) + 4u(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

$$u(a) = 1, \quad u'(a) = -1 \tag{6}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $g \in C(\mathbb{R})$ dados. De la teoría general de los PVI sabemos que el problema tiene solución única (existencia y unicidad) $u \in C^2(\mathbb{R})$ (si la ED fuera de orden n, tendremos $u \in C^n(\mathbb{R})$). Este hecho es esencial para el procedimiento que sigue.

Como primer paso vamos a reemplazar el PVI por una sola ED en sentido distribucional. Sea $u(x)$ la solción buscada, entonces ponemos

$$v(x) := h(x-a)u(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{7}$$

De lo anterior dicho vemos que $v(x)$ es de clase C^2 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$ (a trozos). Entonces $v(x)$, $v'_{cl}(x)$ pueden tener saltos únicamente en $x = a$. Entonces

$$v'_{gen}(x) = h(x-a)u'(x) + u(a)\delta_a(x) \overset{(6)}{=} h(x-a)u'(x) + \delta_a(x),$$

$$\begin{aligned}
v''_{gen}(x) = h(x-a)u''(x) + u'(a)\delta_a(x) + \delta'_a(x) &\overset{(6)}{=} h(x-a)u''(x) - \delta_a(x) + \delta'_a(x) \\
\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad v''_{gen}(x) + 4v(x) &= h(x-a)[u''(x) + 4u(x)] - \delta_a(x) + \delta'_a(x) \\
\overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad v''_{gen}(x) + 4v(x) &= h(x-a)g(x) - \delta_a(x) + \delta'_a(x),
\end{aligned} \tag{8}$$

y tenemos el PVI resumida en una sola ED.

Como segundo paso vamos a resolver (8). La s.f. causal de $L = d^2/dx^2 + 4$, es como ya sabemos, $E(x) = \frac{1}{2}h(x)\operatorname{sen}(2x)$ y como el miembro derecho de (8) es causal también, sabemos que $v(x) = E(x) * [h(x-a)g(x) - \delta_a(x) + \delta'(x)]$ es solución de (8). Tenemos

$$\begin{aligned}
v(x) &= E(x) * h(x-a)g(x) - E(x) * \delta_a(x) + E(x) * \delta'_a(x) \\
&= E(x) * h(x-a)g(x) - E(x-a) + E'_{gen}(x-a),
\end{aligned}$$

pero $E'_{gen}(x) = h(x)\cos(2x)$, entonces

$$v(x) = E(x) * h(x-a)g(x) - h(x-a)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}[2(x-a)] - \cos[2(x-a)]\right). \tag{9}$$

Para calcular el producto de convolución en (9) podemos probar aplicar las reglas operacionales de la convolución o utilizar integración usando

$$\begin{aligned} E(x) * h(x-a)g(x) &= h(x-a)g(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{2}h(x-a)\int_a^x g(\xi)\,\mathrm{sen}[2(x-\xi)]d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

De (9), (10) finalmente

$$v(x) = h(x-a)\left(\frac{1}{2}\int_a^x g(\xi)\,\mathrm{sen}[2(x-\xi)]d\xi - \frac{1}{2}\mathrm{sen}[2(x-a)] + \cos[2(x-a)]\right)$$

y comparando con (7), $v(x) = h(x-a)u(x)$, obtenemos la solución final

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_a^x g(\xi)\,\mathrm{sen}[2(x-\xi)]d\xi - \frac{1}{2}\mathrm{sen}[2(x-a)] + \cos[2(x-a)] \quad -\infty < x < \infty$$

del PVI. La integral de convolución podemos evaluar cuando conocemos la forma explícita de $g(x)$.

Para más ejemplos ver la guía de ejercicios resueltos del profesor P. F. Hummelgens.

Una ED con coeficientes constantes $Lu(x) = g(x)$ puede escribirse como una ecuación de convolución: $(L * \delta) * u = g$. Más generalmente una <u>ecuación de convolución</u> (EC) es de la forma

$$f(x) * u(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \tag{11}$$

donde $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuciones dadas (para la ED anterior $f = L\delta$). Por ejemplo, si $f \in \mathcal{D}'_+\mathbb{R}$ entonces $f * u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ para todo $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ y podemos resolver (11) para una $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dada (las mismas observaciones si reemplazamos $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ por $L^1(\mathbb{R})$ por ejemplo). Si $f \in \mathcal{D}'$ es de soporte compacto, entonces existe $f(x) * u(x)$ para <u>todo</u> $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sea $f*$ un <u>operador de convolución</u>, entonces una $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $f * E = \delta$ se llama una <u>solución fundamental (s.f.) del operador de convolución $f*$</u>. Como $f*$ <u>es un operador lineal</u>, la s.f. <u>general</u> de $f*$ es $\xi = E(x) + v(x)$, donde $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la solución general de la ecuación de convolución homogénea $f(x) * v(x) = 0$.

Consideremos (11) en el espacio $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, es decir, supongamos $f, g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ y buscamos soluciones $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Sea $E \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ una s.f. de $f*$, entonces existe $E(x)*g(x) = g(x)*E(x)$ (ya que ambos factores son causales) y

$$f * (E * g) = (f * E) * g = \delta * g = g$$

$$\Longrightarrow \quad u_p(x) = E(x) * g(x) \tag{12}$$

es una solución particular de (11), y la solución general de (11) es $u(x) = E(x) * g(x) + v(x)$, donde $v(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea $f * v = 0$.

Ejemplo 3. *(a) Sea la EC*

$$h(x) * u(x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{13}$$

donde $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ *dada, y buscamos una solución causal* $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$*. Tenemos*

$$h(x) * u(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad h'_{gen}(x) * u(x) = g'_{gen}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(x) * u(x) = g'_{gen}(x) \quad \Longrightarrow \quad u_p(x) = g'_{gen}(x)$$

es una solución particular de (13) y es causal. La EC homogénea es

$$h(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h'_{gen}(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = 0,$$

de modo que la EC homogénea tiene únicamente la solución trivial $v(x) = 0$*. Por lo tanto (13) tiene solución única en* $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$*, dada por*

$$u(x) = g'_{gen}(x)$$

(b) Sea la EC

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(2x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Tenemos

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x)x * u(x) = 2h(x)\cos(2x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2h(x) * u(x) = -4h(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2\delta(x) \quad \Longrightarrow \quad 2\delta(x) * u(x) = -8h(x)\cos(2x) + 2\delta'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad u_p(x) = -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x)$$

es solución particular causal de (14). Nuevamente la EC homogénea tiene únicamente la solución trivial, por lo tanto $u_p(x)$ *es la solución de (14) en* $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$*.*

Alternativamente podemos primero buscar una s.f. causal $E(x)$ *de* $h(x)x^2$*:*

$$h(x)x^2 * E(x) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x)x * E(x) = \delta'(x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x) * E(x) = \delta''(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2E(x) = \delta'''(x) \quad \Longrightarrow \quad E(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x).$$

Ahora según (12),

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \frac{1}{2}\delta'''(x) * h(x)\,\mathrm{sen}(2x) = \frac{1}{2}(h(x)\,\mathrm{sen}(2x))'''_{gen} \\ &= -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x), \end{aligned}$$

como antes. Más ejemplos de ecuaciones de convolución presentaremos en la clase 10.